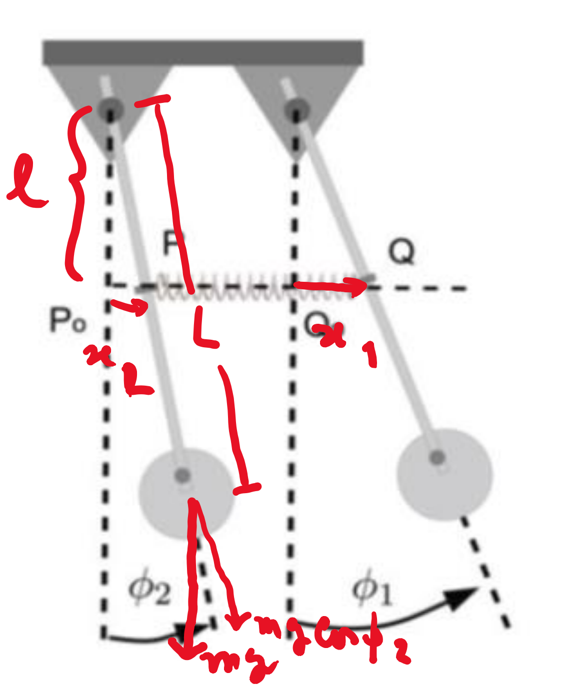
เฉลยการบ้านครั้งที่ 4

1. จากรูปที่ให้พบว่าแรงกระทำต่อ pendulum แต่ละอันประกอบด้วยแรงสปริงและแรงโน้มถ่วง โดยกำหนดให้ $\phi_1 > \phi_2$



การคิด equation of motion ต้องใช้ $\Sigma\tau$ แทนที่จะเป็น ΣF เนื่องจากมีการหมุนของวัตถุรอบแกนหมุน โดยแรงทั้งสองที่กล่าวมาข้างต้นทำให้เกิด torque ดังนี้

1) Torque เนื่องจากมาจาก gravity

   พิจารณา torque เนื่องมาจาก gravity ในที่นี้น้ำหนักของวัตถุทำให้เกิด restoring torque ดึงวัตถุกลับยังตำแหน่งสมดุล ซึ่งสามารถเขียนแยกเป็น torque ของมวลซ้ายมือและขวามือได้เป็น

   Torque ที่เกิดขึ้นเนื่องจาก gravity สำหรับมวลซ้ายมือ : $-mgL\sin\phi_2$

   Torque ที่เกิดขึ้นเนื่องจาก gravity สำหรับมวลขวามือ :$-mgL\sin\phi_1$

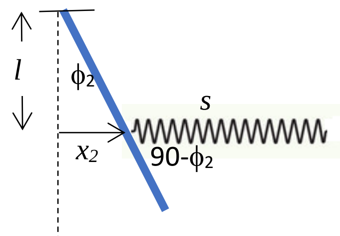
2) Torque เนื่องมาจาก แรงสปริง

   เนื่องจาก $\phi_1 > \phi_2$ ดังนั้นแรงเนื่องจากสปริงที่กระทำกับมวลซ้ายมือมีทิศเป็นบวกในขณะที่แรงเนื่องจากสปริงกระทำกับมวลขวามือมีทิศเป็นลบ

   Torque ที่เกิดจากแรงสปริงสำหรับมวลซ้ายมือ : $+s(\phi_1 - \phi_2)l^2$

   ในทำนองเดียวกัน torque ที่เกิดจากแรงสปริงสำหรับมวลขวามือ : $-s(\phi_1 - \phi_2)l^2$

แสดงที่มาของ Torque เนื่องจากแรงสปริงสำหรับมวลซ้ายมือ



-แรงเนื่องจากสปริง : $s(\phi_1 - \phi_2)l$ โดยที่ $x_1 = l\phi_1$ และ $x_2 = l\phi_2$

-Torque เนื่องจากแรงสปริง : $\vec{r} \times \vec{F} = s(\phi_1 - \phi_2)l\ (l/\cos\phi_2)\sin(90 - \phi_2) = s(\phi_1 - \phi_2)l^2$

สำหรับ torque เนื่องจากสปริงสำหรับมวลขวาก็หาได้ในทำนองเดียวกัน

เมื่อนำ torque ทั้งหมดมารวมกันจะได้ equation of motion สำหรับมวลทางซ้ายและทางขวาดังนี้

$$I\ddot{\phi}_2 = -mgL\sin\phi_2 + s(\phi_1 - \phi_2)l^2$$
$$I\ddot{\phi}_1 = -mgL\sin\phi_1 - s(\phi_1 - \phi_2)l^2$$

เมื่อ I คือ moment of inertia ของมวล เขียนได้เป็น mL^2

แทนค่า I และพิจารณาขนาดมุมที่แกว่งมีค่าน้อย ๆ สมการการเคลื่อนที่ข้างต้นเขียนใหม่ได้เป็น

$$\ddot{\phi}_2 = -\frac{g}{L}\phi_2 + \frac{sl^2}{mL^2}(\phi_1 - \phi_2)$$
$$\ddot{\phi}_1 = -\frac{g}{L}\phi_1 - \frac{sl^2}{mL^2}(\phi_1 - \phi_2)$$

สมมติให้ solution ของสมการการเคลื่อนที่ข้างต้นเขียนได้เป็น $\phi_1 = \phi_{01}e^{i\omega t}$ และ $\phi_2 = \phi_{02}e^{i\omega t}$

ดังนั้นหา 2nd derivative และ แทนกลับเข้าไปในสมการการเคลื่อนที่ เราจะได้

$$-\omega^2\phi_{02} = -\frac{g}{L}\phi_{02} + \frac{sl^2}{mL^2}(\phi_{01} - \phi_{02})$$
$$-\omega^2\phi_{01} = -\frac{g}{L}\phi_{01} - \frac{sl^2}{mL^2}(\phi_{01} - \phi_{02})$$

แก้สมการเพื่อหา ω^2 ซึ่งพบว่าเป็นไปได้สองค่าคือ

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{sl^2}{mL^2}\right) = \pm\frac{sl^2}{mL^2}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}, \frac{g}{L} + \frac{2sl^2}{mL^2} \qquad \#$$

2. สมการการเคลื่อนที่ของมวลแต่ละก้อนเขียนได้เป็น

$$6m\ddot{y}_1 = -ky_1 + k(y_2 - y_1)$$
$$10m\ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) + k(y_3 - y_2)$$
$$3m\ddot{y}_3 = -k(y_3 - y_2)$$

หรือจัดรูใหม่ได้เป็น

$$6m\ddot{y}_1 = -2ky_1 + ky_2$$
$$10m\ddot{y}_2 = -2ky_2 + ky_1 + ky_3$$
$$3m\ddot{y}_3 = -ky_3 + ky_2$$

สมมติให้ solution ของ equation of motion เขียนได้เป็น

$$y_1 = A_1 e^{i\omega t}$$
$$y_2 = A_2 e^{i\omega t}$$
$$y_3 = A_3 e^{i\omega t}$$

หา $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2$ และ $\ddot{y}_3$ และแทนกลับเข้าไปใน equation of motion เราจะได้

$$(6m\omega^2 - 2k)y_1 + ky_2 = 0$$

$$ky_1 + (10m\omega^2 - 2k)y_2 + ky_3 = 0$$
$$0 + ky_2 + (3m\omega^2 - k)y_3 = 0$$

จัด equation of motion ข้างต้นในรูป eigen value eigen function

$$\begin{bmatrix} 6m\omega^2 - 2k & k & 0 \\ k & (10m\omega^2 - 2k) & k \\ 0 & k & (3m\omega^2 - k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ดังนั้น matrix ข้างต้นเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 6\omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & (10m\omega^2 - 2k) & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & (3\omega^2 - \omega_0^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หา determinant ของ matrix 3x3 ซึ่งต้องเป็นศูนย์

$$(6\omega^2 - 2\omega_0^2)(10m\omega^2 - 2k)(3\omega^2 - \omega_0^2) - \omega_0^4(6\omega^2 - 2\omega_0^2) - \omega_0^4(3\omega^2 - \omega_0^2) = 0$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{3}, \frac{\omega_0^2}{30}, \frac{\omega_0^2}{2} \qquad \#$$